FONCTIONS RÉCIPROQUES

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x$.
   (a) Etudier et tracer la courbe.
   (b) Donner l'intervalle maximal contenant 0 , I, sur lequel f est injective ; on note f^{-1} la fonction réciproque de la restriction de f à I ; quel est l'ensemble de définition de f^{-1}? Tracer la courbe de $f_{|I}$ et de f^{-1}.
   (c) Sur quel intervalle f^{-1} est-elle dérivable ? Calculer $\left(f^{-1}\right)'(y)$ pour y dans cet intervalle.
   (d) Donner les valeurs exactes de $f^{-1}(0), \left(f^{-1}\right)'(0), f^{-1}\left(-\dfrac{11}{8}\right), \left(f^{-1}\right)'\left(-\dfrac{11}{8}\right)$, et des valeurs approchées de $f^{-1}(1), \left(f^{-1}\right)'(1)$.

2. Soit f une application $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injective, f^{-1} sa fonction réciproque ; déterminer $g^{-1}(x)$ dans les cas suivants :
   (a) $g(x) = f(x) + a$
   (b) $g(x) = f(x + a)$
   (c) $g(x) = af(x)$ avec $a \neq 0$
   (d) $g(x) = f(ax)$ avec $a \neq 0$
   (e) $g(x) = f(e^x)$
   (f) A quel cas général les cas (b),(d),(e) appartiennent-ils ? Et les cas (a) et (c)?

3. On pose $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.Vérifier que f est bijective et donner f^{-1}. En déduire une symétrie de la courbe de f.

FONCTIONS LOGARITHMES, EXPONENTIELLES, PUISSANCES

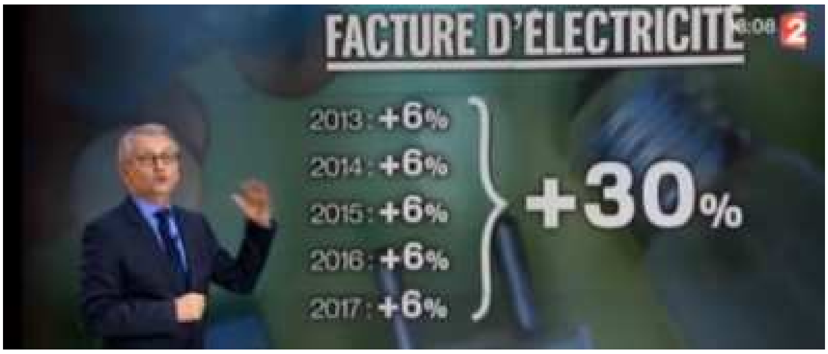
4. : Montrer les petites formules :
   (a) $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ et plus généralement : $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.
   (b) $\log_x 10 = \dfrac{1}{\log x}$ et plus généralement $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

5. :
   (a) Trouver une formule donnant le nombre de chiffres d'un entier strictement positif N en écriture décimale (ou le nombre de chiffres avant la virgule d'un réel > 0).
   (b) Appliquer cette formule à $2^{74\ 207\ 281} - 1$; ce nombre est un nombre premier de Mersenne, le plus grand nombre premier actuellement connu (découvert en janvier 2016).
   Rep : 22 338 618 chiffres.
   (c) Appliquer également à $e^{e^{e^e}}$ et à 500!.
   Rep : 1 656 521 et 1135.

6. :
   (a) Avec un taux d'inflation de 2% par an, au bout de combien d'années les prix auront-ils doublés ?
   (b) Les prix ont doublé depuis 12 ans. Quel est le taux d'inflation moyen annuel ?
   (c) Trouver un parallèle entre le résultat du b) et la définition des $\frac{1}{2}$ tons en musique (il y en a 12 dans une octave, et dans une octave, la fréquence est multipliée par 2).

solution (erronée) par proportionnalité	$\dfrac{100}{12}\% \approx 8,3\%$
solution exacte	$100\left(\sqrt[12]{2} - 1\right)\% \approx 5,9\%$

7. :



Pouvez vous-corriger (cf. Figure1) , soit le 30%, considérant exact le pourcentage annuel de 6%, soit les 6%, considérant exact le pourcentage de 30%

8. : Déterminer la limite des expressions suivantes quand $x \to 0$:

   (a) $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$

   (b) $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2+x}$

   (c) $\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)}{x^2}$

9. Déterminer la limite des expressions suivantes quand $x \to 0$:

   (a) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$

   (b) $\dfrac{e^{4x^2}-1}{x^2-4x}$

   (c) $\dfrac{e^{x+1}-1}{x^2-x}$

   (d) $\dfrac{e^{x+1}-e}{x}$

   (e) $\dfrac{e^{\ln(x+1)}-1}{2x}$

   Rep : (a)1 (b)0 (c)$\mp\infty$ (d)e (e) 1/2

10. : Déterminer la limite des expressions suivantes quand $x \to +\infty$:

    (a) $x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

    (b) $x\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}\right)$

    (c) $x\left(e^{\frac{1}{x^2}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$

11. : Déterminer la limite quand $x \to +\infty$ des expressions suivantes :
    Conseil : commencer par déterminer la limite du logarithme de l'expression.

    (a) $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$

    (b) $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-2}$

    (c) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

(d) $\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{x}$

(e) $\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$

(f) $\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

(g) $\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$

12. : Trouver des fonctions a et b avec $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = 0$ et telles que :

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(a\left(x\right)\right)^{b(x)} \in]0,1[$

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(a\left(x\right)\right)^{b(x)} = 0$

   Retenez donc que la forme indéterminée "0^0" n'est pas toujours égale à 1...

13. Étudier complètement les fonctions en moins de 10 minutes (tracé compris).

   (a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$

   (b) $f : x \mapsto x \ln x$

   (c) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

   (d) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$

   (e) $f : x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$

   (f) $f : x \mapsto x^x$

14. Étudier et tracer les courbes des fonctions f définies par $f(x) = e^{1/x}, g(x) = xf(x), h(x) = f(x)/x$.

15. * : Étudier et tracer la courbe d'équation cartésienne : $y^2 = x^2 \ln \dfrac{1}{x}$.

16. * : Ayant tracé la courbe de f et celle de g dans un même repère, donner une méthode pour construire points par points celle de $g \circ f$; appliquer au tracé de $y = e^{-x^2}$.

17. * :

   (a) En posant $y = tx$, déterminer une paramétrisation de l'ensemble $E = \left\{(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \ / \ x^y = y^x\right\}$ sous la forme : $\left\{\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = t\varphi(t) \end{array}\right.$.

   (b) Tracer E à l'aide de la machine.

   (c) Déterminer les points (x,y) de E tels que $x \neq y$ et $x, y \in \mathbb{N}$.

   (d) Hachurer sur la figure l'ensemble $F = \left\{(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \ / \ x^{\ y} > y^x\right\}$.

18. : On rappelle que pour tout $x > -1 \quad \ln(1+x) \leqslant x$.

   (a) En déduire que pour tout $x > 0$: $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

   (b) En déduire que pour tout $x > 0$: $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} \leqslant e \leqslant \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

   (c) En déduire, en effectuant un produit d'inégalités du b) que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{(n+1)^n}{n!} \leqslant e^n \leqslant \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

(d) En déduire un encadrement de $n!$

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

19. : Montrer que si $e^z = \dfrac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$, alors th $\dfrac{z}{2} = \tan x \tan y$ et coth$z = \dfrac{1}{2}(\tan x \tan y + \cot x \cot y)$.

20. : Montrer que si $AB > 0$ alors il existe a, b tels que $Ae^x + Be^{-x} = a\text{ch}\,(x+b)$ et que si $AB < 0$ alors il existe a, b tels que $Ae^x + Be^{-x} = a\text{sh}\,(x+b)$.

21. : On pose $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \text{ch}\,(a+kb)$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \text{sh}\,(a+kb)$.
Calculer $C_n + S_n$; en déduire sans calcul $C_n - S_n$, puis C_n et S_n.
On trouve, si $b \neq 0$: $C_n + S_n = \dfrac{\text{sh}\left((n+1)\dfrac{b}{2}\right)}{\text{sh}\,\dfrac{b}{2}} e^{a+n\frac{b}{2}}$.

22. :
   (a) On pose $p_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} \text{ch}\dfrac{x}{2^k}$; calculer $p_n(x)$ pour $x \neq 0$ en le multipliant par sh $\dfrac{x}{2^n}$.
   (b) On pose $p(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n(x)$; déterminer $p(x)$ pour $x \neq 0$; vérifier que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} p(x) = p(0)$.
   (c) On pose $u_n = \dfrac{1}{2^n}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(\text{ch}\dfrac{x}{2^k} + \text{ch}\dfrac{y}{2^k}\right)$; montrer que $u_n = 2p_{n+1}(x+y)\,p_{n+1}(x-y)$; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

23. * :
   (a) Discuter suivant la valeur du paramètre λ, le nombre de solutions de l'équation ch $x = \lambda x$, et donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la valeur critique de λ.
   (b) On appelle chaînette d'axe (Ox) toute courbe d'équation $y = a.\text{ch}\,\dfrac{x}{a}$, avec $a > 0$. Par quelle transformation géométrique passe-t-on d'une chaînette à une autre ?
   (c) Etant donnés les points $A\left|\begin{array}{l} r\\ R\end{array}\right.$ et $A'\left|\begin{array}{l} -r\\ R\end{array}\right.$ avec $r, R > 0$, déterminer une condition pour qu'il passe une chaînette par A et A'.

FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

24. : Définir la fonction arccot, réciproque de cot sur $]0,\pi[$. Calculer sa dérivée, tracer sa courbe.
Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ arccot $x = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.

25. : Tracer les courbes des fonctions suivantes f, g, h, k, l, m suivantes :
   (a) $f(x) = \cos(\arccos x)$ et $g(x) = \arccos(\cos x)$ (indication : $g(x+2\pi) = ..., g(-x) = ...$)
   (b) $h(x) = \sin(\arcsin x)$ et $k(x) = \arcsin(\sin x)$ (indication : $k(x+\pi) = ...$)
   (c) $l(x) = \tan(\arctan x)$ et $m(x) = \arctan(\tan x)$

26. : Démontrer les identités suivantes :
Pour tout $x \in [-1, 1]$:
   (a) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
   (b) $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $|x| \neq 1$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   (c) $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

27. : Déterminer l'ensemble de définition, puis simplifier les expressions suivantes :

   (a) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

      i. méthode 1 : poser $\theta = \arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ et exprimer x en fonction de θ, simplifier, puis exprimer de nouveau θ en fonction de x ;

      ii. méthode 2 : remarquer que $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$ et donc poser $\theta = ...$ de sorte que $x = \tan^2\dfrac{\theta}{2}$;

      iii. méthode 3 : calculer $f'(x)$ et en déduire $f(x)$.

   (b) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ (indication pour la méthode 2 : $\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} = ...$)

   (c) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right)$ (indication pour la méthode 2 : $\tan\theta - \cot\theta = ...$)

   (d) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$ (indication pour la méthode 2 : $1 + \tan^2\theta = ...$)

   (e) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right)$

28. : On donne deux entiers p et q vérifiant : $0 < p < q$.

   (a) Calculer $\arctan\dfrac{p}{q} + \arctan\dfrac{q-p}{q+p}$.

   (b) Calculer $4\arctan\dfrac{1}{5}$ et à l'aide de la question précédente en déduire la formule de Machin (John Machin, 1680-1751) :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

29. * : Le plan étant rapporté à un repère othonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on marque $A(-1,0), B(1,0)$ et on se donne un point $M(x,y)$; on demande de déterminer en fonction de x, la valeur de $y > 0$ pour laquelle l'angle AMB est maximal (x étant fixé). Notant $f(x)$ la valeur de y trouvée, étudier f et tracer sa courbe ; interpréter ce résultat dans le domaine du foot ou du rugby.

FONCTIONS HYPERBOLIQUES RÉCIPROQUES

30. : Tracer les courbes de :

   (a) $x \mapsto$ch(argch x) et $x \mapsto$argch(ch x)

   (b) $x \mapsto$sh(argsh x) et $x \mapsto$argsh(sh$x$)

   (c) $x \mapsto$th(argth x) et $x \mapsto$argth(th x)

31. :

   (a) Prouver pour tout $x \in [1, +\infty[$: sh(argch x) $= \sqrt{x^2-1}$ et th(argch x) $= \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

   (b) Prouver pour tout $x \in \mathbb{R}$: ch(argsh x) $= \sqrt{1+x^2}$ et th(argsh x) $= \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

   (c) Prouver pour tout $x \in]-1, 1[$: ch(argth x) $= \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et sh(argth x) $= \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

32. * :

(a) Vérifier pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ les identités suivantes :

$$\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \ln\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right)$$
$$= \operatorname{argsh}(\tan x) = \operatorname{signe}(x) \times \operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \operatorname{argth}(\sin x) = 2\operatorname{argth}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

La fonction qui à x associe ces expressions s'appelle fonction de Gudermann inverse et on la note gd^{-1}.

(b) Calculer $\left(\mathrm{gd}^{-1}\right)'(x)$; tracer la courbe de gd^{-1}.
Remarque : cette fonction intervient en cartographie de la façon suivante : dans la projection de Mercator, on pose : $\begin{pmatrix} x = \text{longitude} \\ y = \mathrm{gd}^{-1}(\text{latitude}) \end{pmatrix}$.

(c) Après en avoir justifié son existence, donner l'ensemble de définition de la réciproque gd de gd^{-1}; en calculer la dérivée.
Vérifier : $\mathrm{gd}(x) = 2\arctan e^x - \dfrac{\pi}{2} = \arctan(\mathrm{sh}\ x) = \operatorname{signe}(x) \times \arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}\ x}\right) = \arcsin(\mathrm{th}\ x) = 2\arctan\left(\mathrm{th}\dfrac{x}{2}\right)$.